

Nombre y apellidos:	Calificación
Fecha:	Curso:

2ª EVALUACIÓN.- ANÁLISIS DE FUNCIONES

1.- [2 p] Hallar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^3 - bx + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.- [1'5 p] Se considera la función $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

- a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
- b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje X .

3.- [1'5 p] Se desea construir una piscina de fondo cuadrado, con 32 m^3 de capacidad, de manera que la superficie total (de las paredes más el fondo) sea mínima. ¿Qué dimensiones debe tener la piscina?

4.- [2'5 p] Estudiar y representar la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{4 - x^2}$$

Indicar:

- a) Dominio y puntos de corte
- b) Asíntotas
- c) Crecimiento y decrecimiento
- d) Máximos y mínimos
- e) Concavidad y convexidad

SOLUCIONES: EXAMEN 2ª EVALUACIÓN

1.- • Continuidad:

- Si $x \neq 1$:

$f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - ax + b) = 3 - a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^3 - bx + 2) = a - b + 2 \\ f(1) = a - b + 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $3 - a + b = a - b + 2$; es decir, $2a - 2b = 1$.

• Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - a & \text{si } x < 1 \\ 3ax^2 - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$: Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales han de ser iguales:

$$\left. \begin{matrix} f'(1^-) = 6 - a \\ f'(1^+) = 3a - b \end{matrix} \right\} 6 - a = 3a - b$$

• Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable si:

$$\left. \begin{matrix} 2a - 2b = 1 \\ 6 - a = 3a - b \end{matrix} \right\} a = \frac{11}{6}; \quad b = \frac{4}{3}$$

2.- PAU junio 2009, opción A, ejercicio 2.

a) Recta tangente: $y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3)$

$f(3) = 64$

$f'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x \rightarrow f'(3) = 96$

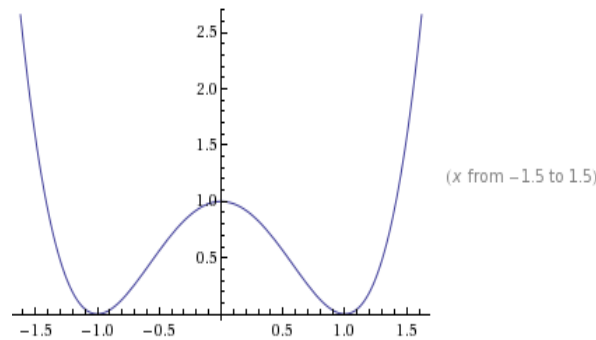
$y = 64 + 96(x - 3) \rightarrow \mathbf{y = 96x - 224}$

b) Hallamos los puntos de corte con el eje X:

$f(x) = (x^2 - 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1, x = -1.$

Calculamos el área: integral definida entre -1 y 1.

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{15} u^2$$



3.- Llamamos x al lado de la base e y a la altura. El volumen es:

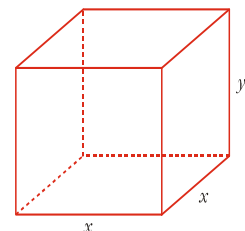
$V = x^2 y = 32 \text{ m}^3 \rightarrow y = \frac{32}{x^2}$

La superficie total (paredes más fondo) es:

$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} = f(x), \quad (x > 0)$

Buscamos $x > 0$ para que la superficie sea mínima:

$f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$



$$f'(x)=0 \rightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 2$$

Veamos que corresponde al mínimo:

$$f''(x) = 2 + \frac{256}{x^3}; f''(4) > 0 \rightarrow \text{En } x=4 \text{ hay un mínimo.}$$

Por tanto, la piscina debe tener **4 m de lado de la base y 2 m de altura.**

4.-

- Dominio = $\mathbf{P} - \{-2, 2\}$
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal}$$

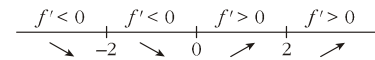
Si $x \rightarrow -\infty$ y si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < -1 \rightarrow$ la curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x(4-x^2) - (x^2+1) \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3 + 2x}{(4-x^2)^2} = \frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 10x=0 \rightarrow x=0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(0, \frac{1}{4})$.

- Corte con los ejes:

- Con el eje Y $\rightarrow x=0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow$ Punto $(0, \frac{1}{4})$

- Con el eje X $\rightarrow y=0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ No corta al eje X

- Gráfica:

